Semana 5

- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas correspondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios 1 a 11 de la Guía 2. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

Transformaciones lineales

Antes de ponernos a resolver ejercicios, recordemos la definición de transformaciones (y funcionales) lineales.

Definición. *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Una función $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se llama* transformación lineal *(TL) de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ si cumple:*

i) $T(v + v') = T(v) + T(v'),$ *para todo* $v,\ v' \in \mathbb{V}$,

ii) $T(\alpha v) = \alpha T(v),$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{K},\ v \in \mathbb{V}$.

El conjunto de todas las transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$ se denota por $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Si $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ escribimos $\mathcal{L}(\mathbb{V}) := \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. A las transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W} = \mathbb{K}$ se las llama *funcionales lineales*.

Ejercicio 2.1 c) Verificar que la siguiente aplicación es una transformación lineal: $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T_3([x\ y\ z]^T) := [2z - 3y\ \ -z + 3x\ y - 2x]^T.$$

Dem. Observar que $T_3(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) := \begin{bmatrix} 2z - 3y \\ -z + 3x \\ y - 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Si llamamos $A := \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ entonces, si $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, tenemos que $T_3(v) = Av$. Con esto en mente, verifiquemos $i)$ y $ii)$ de la definición de transformaciones lineales.

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v, v' \in \mathbb{R}^3$, entonces

i) $T(v + v') = A(v + v') = Av + Av' = T(v) + T(v')$,

ii) $T(\alpha v) = A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha T(v)$.

Por lo tanto, como T cumple con $i)$ y $ii)$ de la definición de transformaciones lineales, tenemos que T es una transformación lineal, es decir $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. $\square$

En el ejercicio 2.3 van a probar que si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, entonces (siempre) existe $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tal que $T(x) = Ax,$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$.

Ejercicio 2.2 Verificar las siguientes afirmaciones:

b) Para cada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, la aplicación $T_A : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}$ definida por

$$T_A(X) := \operatorname{tr}(A^*X)$$

es una funcional lineal de $\mathbb{K}^{m\times n}$ (hay un error en la Guía, la funcional es de $\mathbb{K}^{m\times n}$ y no como dice "de $\mathbb{K}^n$").

e) Dados $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, la aplicación $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ definida por

$$L[y] := \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y$$

es una trasformación lineal de $C^\infty(\mathbb{R})$ a $C^\infty(\mathbb{R})$.

Antes de resolver el ejercicio, recordemos las propiedades de la traza de una matriz (se sugiere verificarlas haciendo la cuenta):

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$, para todo $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
2. $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
3. $\operatorname{tr}(A^*) = \overline{\operatorname{tr}(A)}$, para todo $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$,
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, para todo $A \in \mathbb{K}^{n\times m}, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

Dem. *b*): Verifiquemos *i*) y *ii*) de la definición de transformaciones lineales usando las propiedades que acabamos de ver. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $X, Y \in \mathbb{K}^{m\times n}$, entonces

i) $T_A(X+Y) = \operatorname{tr}(A^*(X+Y)) = \operatorname{tr}(A^*X + A^*Y) = \operatorname{tr}(A^*X) + \operatorname{tr}(A^*Y) = T_A(X) + T_A(Y)$, donde usamos la propiedad 1 de la traza.

ii) $T_A(\alpha X) = \operatorname{tr}(A^*(\alpha X)) = \operatorname{tr}(\alpha A^*X) = \alpha \operatorname{tr}(A^*X) = \alpha T_A(X)$, donde usamos la propiedad 2 de la traza.

Entonces como T_A cumple con *i*) y *ii*) de la definición de transformaciones lineales, tenemos que $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{m\times n}, \mathbb{K})$ es decir es una funcional lineal de $\mathbb{K}^{m\times n}$

e): Verifiquemos *i*) y *ii*) de la definición de transformaciones lineales usando la linealidad de la derivada. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ e $y, z \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces

i) $L[y+z] = \frac{d^n(y+z)}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}(y+z)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d(y+z)}{dx} + a_0(y+z) = \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^n z}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_1\frac{dz}{dx} + a_0 y + a_0 z = L[y] + L[z]$.

ii) $L[\alpha y] = \frac{d^n(\alpha y)}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}(\alpha y)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d(\alpha y)}{dx} + a_0(\alpha y) = \alpha\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\alpha\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\alpha\frac{dy}{dx} + a_0\alpha y = \alpha(\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y) = \alpha L[y]$.

Entonces como L cumple con $i)$ y $ii)$ de la definición de transformaciones lineales, tenemos que $L \in \mathcal{L}(C^{\infty}(\mathbb{R}))$. $\square$

Ejercicio: Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Demostrar que

> si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ entonces $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$.

Dem. Por un lado, observar que como $0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}} + 0_{\mathbb{V}}$ y T es TL, tenemos que $T(0_{\mathbb{V}}) = T(0_{\mathbb{V}} + 0_{\mathbb{V}}) = T(0_{\mathbb{V}}) + T(0_{\mathbb{V}})$.

Entonces, si $-T(0_{\mathbb{V}})$ es el inverso aditivo de $T(0_{\mathbb{V}})$ (existe porque $\mathbb{W}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial), tenemos que $0_{\mathbb{W}} = T(0_{\mathbb{V}}) + -T(0_{\mathbb{V}}) = (T(0_{\mathbb{V}}) + T(0_{\mathbb{V}})) + -T(0_{\mathbb{V}}) = T(0_{\mathbb{V}}) + (T(0_{\mathbb{V}}) + -T(0_{\mathbb{V}})) = T(0_{\mathbb{V}}) + 0_{\mathbb{W}} = T(0_{\mathbb{V}})$. $\square$

Ejercicio: Explicar porque las siguientes funciones NO son transformaciones lineales:

a) $T : \mathbb{K}^{2\times 2} \to \mathbb{K}$ definida por $T(X) := \det(X)$.

b $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x) := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) := \overline{z}$.

Dem. Para demostrar que una función NO es una transformación lineal, basta con encontrar algún contraejmplo donde $i)$ o $ii)$ de la definición de transformaciones lineales NO se cumpla.

a): Sean $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces $T(X) + T(Y) = \det(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) + \det(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = 0 + 0 = 0 \neq 1 = \det(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = T(X+Y)$. Entonces T NO es una transformación lineal.

b): Basta tomar cualquier vector $x, y \in \mathbb{R}^3$ y ver que $T(x)+T(y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = T(x+y)$. Entonces T NO es una transformación lineal.

c) : Sean $\alpha = i$ y $x = 1$. Entonces $f(\alpha x) = f(i.1) = f(i) = \overline{i} = -i \neq i.1 = i.f(1) = \alpha f(x)$. Entonces f NO es una funcional lineal. $\square$

Imagen y Núcleo de una transformación lineal

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. El *núcleo* de T se denota por $Nu(T)$ y se define como

$$Nu(T) := \{v \in \mathbb{V} : T(v) = 0_{\mathbb{W}}\} \subseteq \mathbb{V}.$$

La *imagen* de T se denota por $Im(T)$ y se define como

$$Im(T) := \{w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V} : w = T(v)\} = \{T(v) : v \in \mathbb{V}\} \subseteq \mathbb{W}.$$

Por otro lado, sean $X \subseteq \mathbb{V}$ y $Z \subseteq \mathbb{W}$ dos subconjuntos de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente, entonces: el conjunto de todas las imágenes de los elementos de X se designa por $T(X)$ y se define como:

$$T(X) = \{w \in \mathbb{W} : \exists x \in X : w = T(x)\} = \{T(x) : x \in X\} \subseteq \mathbb{W}.$$

El conjunto de todos los elementos de $\mathbb{V}$ cuyas imágenes pertenecen a Y se designa con $T^{-1}(Y)$ y se define como:

$$T^{-1}(Y) := \{v \in \mathbb{V} : T(v) \in Y\} \subseteq \mathbb{V}.$$

No confundir la preimagen de un conjunto con la existencia de inversa de una transformación lineal. La preimagen de un conjunto siempre está definida (podría eventualmente dar el conjunto vacío) sin embargo no siempre existe la inversa de una transformación lineal.

> Observar que $Nu(T) = T^{-1}(\{0_{\mathbb{W}}\})$ e $Im(T) = T(\mathbb{V})$.

Ejercicio de examen: Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) $Nu(T)$ es un subepacio de $\mathbb{V}$.

b) $Im(T)$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.

c) Si $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ entonces $T(\mathcal{S})$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.

d) Si $\mathcal{T}$ es un subespacio de $\mathbb{W}$ entonces $T^{-1}(\mathcal{T})$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

e) Supongamos que $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ tal que $\mathcal{S} = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$. Entonces

$$T(\mathcal{S}) = gen\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_r)\}.$$

f) Supongamos que $\mathbb{V} = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Entonces

$$Im(T) = gen\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\}.$$

Antes de resolver el ejercicio, recordemos que

> si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, un subconjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ si y sólo si:
>
> i) $\mathcal{S} \neq \emptyset$,
>
> ii) si $u, v \in \mathcal{S}$ entonces $u + v \in \mathcal{S}$,
>
> iii) si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $v \in \mathcal{S}$ entonces $\alpha v \in \mathcal{S}$.

Dem. a): Veamos que $Nu(T)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

i) $0_{\mathbb{V}} \in Nu(T)$ pues como T es una TL, tenemos que $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$.

ii) si $u, v \in Nu(T)$ entonces $T(u) = 0_{\mathbb{W}}$ y $T(v) = 0_{\mathbb{W}}$. Entonces, como T es TL, $T(u+v) = T(u) + T(v) = 0_{\mathbb{W}} + 0_{\mathbb{W}} = 0_{\mathbb{W}}$. Por lo tanto $u + v \in Nu(T)$.

iii) si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $v \in Nu(T)$ entonces $T(v) = 0_{\mathbb{W}}$. Entonces, como T es TL, $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha 0_{\mathbb{W}} = 0_{\mathbb{W}}$. Por lo tanto $\alpha v \in Nu(T)$.

b): Veamos que $Im(T)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

i) $0_{\mathbb{W}} \in Im(T)$ pues como T es una TL, tenemos que $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$ (existe $x \in \mathbb{V}$ tal que $T(x) = 0_{\mathbb{W}}$, en este caso $x = 0_{\mathbb{V}}$).

ii) si $u, v \in Im(T)$ entonces existen $x, y \in \mathbb{V}$ tales que $T(x) = u$ y $T(y) = v$. Entonces, como T es TL, $T(x+y) = T(x) + T(y) = u + v$. Encontramos un vector, que en este caso es $x + y$, tal que $T(x+y) = u + v$. Por lo tanto $u + v \in Im(T)$.

iii) si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $v \in Im(T)$ entonces existe $x \in \mathbb{V}$ tal que $T(x) = v$. Entonces, como T es TL, $T(\alpha x) = \alpha T(x) = \alpha v$. Encontramos un vector, que en este caso es αx, tal que $T(\alpha x) = \alpha v$. Por lo tanto $\alpha v \in Im(T)$.

c): Ejercicio (es parecido al ítem b).

d): Veamos que $T^{-1}(\mathcal{T})$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

i) Veamos que $0_{\mathbb{V}} \in T^{-1}(\mathcal{T})$. Como T es una TL, $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$ y como $\mathcal{T}$ es un subespacio $0_{\mathbb{W}} \in \mathcal{T}$. Conclusión, $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}} \in \mathcal{T}$ entonces $0_{\mathbb{V}} \in T^{-1}(\mathcal{T})$.

ii) si $u, v \in T^{-1}(\mathcal{T})$ entonces $T(u) \in \mathcal{T}$ y $T(v) \in \mathcal{T}$. Entonces, como $\mathcal{T}$ es un subespacio, $T(u) + T(v) \in \mathcal{T}$. Además como T es TL, tenemos que $T(u+v) = T(u) + T(v) \in \mathcal{T}$. Entonces $u + v \in T^{-1}(\mathcal{T})$.

iii) si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $v \in T^{-1}(\mathcal{T})$ entonces $T(v) \in \mathcal{T}$. Entonces, como $\mathcal{T}$ es un subespacio, $\alpha T(v) \in \mathcal{T}$. Además como T es TL, tenemos que $T(\alpha v) = \alpha T(v) \in \mathcal{T}$. Entonces $\alpha v \in T^{-1}(\mathcal{T})$.

e): Tenemos que probar una igualdad de conjuntos, así que vamos a probar la doble inclusión.

Por un lado, como $v_1, v_2, \cdots, v_r \in \mathcal{S}$, tenemos que $T(v_i) \in T(\mathcal{S})$ para todo $i = 1, 2, \cdots, r$ (revisar la definición de $T(\mathcal{S})$) y vimos en el ítem c) que $T(\mathcal{S})$ es un subspacio (porque $\mathcal{S}$ es un subespacio), entonces

$$gen\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_r)\} \subseteq T(\mathcal{S}).$$

Veamos la otra inclusión. Supongamos que $w \in T(\mathcal{S})$, entonces existe $s \in \mathcal{S}$ tal que $w = T(s)$. Entonces, como $s \in \mathcal{S} = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$, existen $a_1, a_2, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ tales que

$$s = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_r v_r.$$

Entonces como T es TL,

$$w = T(s) = T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_r v_r) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_r T(v_r).$$

Por lo tanto $w \in gen\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_r)\}$ y tenemos que $T(\mathcal{S}) \subseteq gen\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_r)\}$. Como probamos la doble inclusión, vale la igualdad de conjuntos.

$f)$: Como $Im(T) = T(\mathbb{V})$, el item $f)$ es un caso particular del item $e)$. $\square$

Recordemos el teorema de la dimensión para transformaciones lineales:

Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Entonces

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)).$$

En el siguiente ejercicio, aplicaremos varios de los conceptos que vimos hasta acá.
Ejercicio : Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ la TL definida por

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) - p(1) \\ p(0) + p(-1) \end{bmatrix}.$$

a) Hallar bases de $Nu(T)$ e $Im(T)$.

b) Sean $\mathcal{S} := \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = p'(1) = 0\}$ y $\mathcal{U} := gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Hallar $T(\mathcal{S})$ y $T^{-1}(\mathcal{U})$.

Dem. $a)$: Recordemos que $Nu(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : T(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$. Entonces $p \in Nu(T)$ si $p(x) = ax^2+bx+c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $T(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Observar que $p(0) = c,\ p(1) = a+b+c$ y $p(-1) = a-b+c$. Entonces

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T(p) = \begin{bmatrix} -a-b \\ a-b+2c \end{bmatrix}.$$

Entonces, $-a-b = 0$ y $a-b+2c = 0$. Entonces $a = -b$ y $c = b$ Entonces $p(x) = -bx^2 + bx + b = b(-x^2+x+1)$, con $b \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $Nu(T) = gen\{-x^2+x+1\}$ y una base de $Nu(T)$ puede ser $B_{Nu(T)} = gen\{-x^2+x+1\}$.

Por otra parte, por lo que acabamos de probar, como $\{x^2, x, 1\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ (en particular es un sistema de generadores de $\mathbb{R}_2[x]$) entonces

$$Im(T) = gen\{T(x^2), T(x), T(1)\} = gen\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\} = \mathbb{R}^2.$$

Otra manera de resolver este item es usando el teorema de la dimensión: como $\dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{R}_2[x]) - \dim(Nu(T)) = 3 - 1 = 2$ e $Im(T) \subseteq \mathbb{R}^2$, tenemos que $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

$b)$: Busquemos un sistema de generadores de $\mathcal{S}$. Si $p \in \mathcal{S}$ entonces $p(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y como $p(1) = a+b+c$ y $p'(1) = 2a+b$, tenemos que $a+b+c = 2a+b = 0$. Entonces

$b=-2a$ y $c=-a-b=-a+2a=a$. Entonces $p(x)=ax^2-2ax+a=a(x^2-2x+1)$, con $a\in\mathbb{R}$. Entonces $\mathcal{S}=gen\{x^2-2x+1\}$ y por lo que probamos arriba,

$$T(\mathcal{S})=gen\{T(x^2-2x+1)\}=gen\{\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\}.$$

Finalmente, recordar que $T^{-1}(\mathcal{U})=\{p\in\mathbb{R}_2[x]:T(p)\in\mathcal{U}\}$. Entonces $p\in T^{-1}(\mathcal{U})$ si $p(x)=ax^2+bx+c$, con $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $T(p)\in\mathcal{U}$. Como $p(0)=c$, $p(1)=a+b+c$ y $p(-1)=a-b+c$, entonces

$$T(p)=\begin{bmatrix}-a-b\\a-b+2c\end{bmatrix}\in\mathcal{U}=gen\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\}.$$

Entonces, $\begin{bmatrix}-a-b\\a-b+2c\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, con $\lambda\in\mathbb{R}$. Entonces $-a-b=\lambda$ y $a-b+2c=\lambda$. Entonces $a=-b-\lambda$ y $2c=\lambda-a+b=\lambda+b+\lambda+b=2b+2\lambda$, entonces $c=b+\lambda$. Por lo tanto,

$$p(x)=(-b-\lambda)x^2+bx+b+\lambda=b(-x^2+x+1)+\lambda(-x^2+1),$$

con $b,\lambda\in\mathbb{R}$. Entonces $T^{-1}(\mathcal{U})=gen\{-x^2+x+1,-x^2+1\}$. $\square$

Observar que en el ejercicio anterior $Nu(T)\subseteq T^{-1}(\mathcal{U})$, eso no es casualidad. En general, vale la siguiente propiedad:

> Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $T:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ una TL. Si $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{W}$ es un subespacio entonces
> $$Nu(T)\subseteq T^{-1}(\mathcal{U}).$$

De hecho, si $v\in Nu(T)$, entonces $T(v)=0_{\mathbb{W}}$, como $\mathcal{U}$ es un subespacio, $T(v)=0_{\mathbb{W}}\in\mathcal{U}$, entonces $v\in T^{-1}(\mathcal{U})$ y tenemos la inclusión que queríamos probar.

Para resolver el siguiente ejercicio vamos a usar algunas propiedades que probamos más arriba. El ejercicio 2.4 b) y 2.5 son similares aunque cada uno con sus particularidades.

Ejercicio 2.4 a): Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, $T:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ una TL y $P,Q\in\mathbb{V}$ dos puntos distintos de $\mathbb{V}$. Sea

$$L_{P,Q}:=\{P+t(Q-P):t\in\mathbb{R}\}$$

la recta que pasa por los puntos P y Q. Mostrar que si $T(P)\neq T(Q)$, entonces la imagen de $L_{P,Q}$ es la recta que pasa por los puntos $T(P)$ y $T(Q)$. En otras palabras

$$T(L_{P,Q})=L_{T(P),T(Q)}.$$

Qué ocurre cuando $T(P)=T(Q)$?

Dem. Tenemos que probar una igualdad de conjuntos así que probaremos la doble inclusión.

Sea $w\in T(L_{P,Q})$, entonces existe $v\in L_{P,Q}$ tal que $w=T(v)$. Como $v\in L_{P,Q}$ (por la definición de $L_{P,Q}$) existe $t_0\in\mathbb{R}$ tal que $v=P+t_0(Q-P)$. Entonces, como T es TL,

$$w=T(v)=T(P+t_0(Q-P))=T(P)+t_0(T(Q)-T(P)).$$

Por lo tanto $w \in L_{T(P),T(Q)} = \{T(P)+t(T(Q)-T(P)) : t \in \mathbb{R}\}$ y tenemos que $T(L_{P,Q}) \subseteq L_{T(P),T(Q)}$.

Recíprocamente, si $w \in L_{T(P),T(Q)}$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $w = T(P) + t_0(T(Q) - T(P))$. A continuación, tenemos que probar que $w \in T(L_{P,Q})$, es decir debemos proponer $v \in L_{P,Q}$ tal que $w = T(v)$. Proponemos

$$v := P + t_0(Q - P),$$

claramente $v \in L_{P,Q}$ y por otra parte, como T es TL, tenemos que

$$T(v) = T(P + t_0(Q - P)) = T(P) + t_0(T(Q) - T(P)) = w$$

y entonces concluimos que $w \in T(L_{P,Q})$. Por lo tanto $L_{T(P),T(Q)} \subseteq T(L_{P,Q})$. Como probamos la doble inclusión, concluimos que $T(L_{P,Q}) = L_{T(P),T(Q)}$ que era lo que queríamos probar.

Si $T(P) = T(Q)$, entonces

$$L_{T(P),T(Q)} = \{T(P) + t(T(Q) - T(P)) : t \in \mathbb{R}\} = \{T(P) + t(0_W) : t \in \mathbb{R}\} = \{T(P)\},$$

por lo tanto todos los puntos de la recta $L_{P,Q}$ se transforman en el (único) punto $T(P)$ cuando le aplicamos T. □

El siguiente ejercicio es parecido al ejercicio 2.8.

Ejercicio de examen: Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ una base de $\mathbb{W}$. Dadas las funcionales lineales $f_i : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, 3$, se define $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ como

$$T(v) = f_1(v)w_1 + f_2(v)w_2 + f_3(v)w_3.$$

Demostrar que:

a) T es una TL.

b) $Nu(T) = N(f_1) \cap Nu(f_2) \cap Nu(f_3)$.

Dem. $a)$: Basta con probar que la función T cumple con $i)$ y $ii)$ de la definición de TL.

i) Sean $v, v' \in \mathbb{V}$, entonces $T(v + v') = f_1(v + v')w_1 + f_2(v + v')w_2 + f_3(v + v')$, usando que f_i son funcionales lineales para $i = 1, 2, 3$, tenemos entonces que

$$T(v + v') = (f_1(v) + f_1(v'))w_1 + (f_2(v) + f_2(v'))w_1 + (f_3(v) + f_3(v'))w_1,$$

como $f_i(v), f_i(v') \in \mathbb{R}$ (el cuerpo de $\mathbb{W}$) para $i = 1, 2, 3$, podemos aplicar la propiedad distributiva (recordar que era uno de los axiomas de los espacios vectoriales). Entonces

$$T(v + v') = f_1(v)w_1 + f_1(v')w_1 + f_2(v)w_2 + f_2(v')w_2 + f_3(v)w_3 + f_3(v')w_3.$$

Por último, asociando, nos queda

$$T(v + v') = f_1(v)w_1 + f_2(v)w_2 + f_3(v)w_3 + f_1(v')w_1 + f_2(v')w_2 + f_3(v')w_3 = T(v) + T(v').$$

ii) Sea $v \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando que f_i son funcionales lineales para $i = 1, 2, 3$, tenemos que

$$T(\alpha v) = f_1(\alpha v)w_1 + f_2(\alpha v)w_2 + f_3(\alpha v) = \alpha f_1(v)w_1 + \alpha f_2(v)w_2 + \alpha f_3(v)w_3 = \alpha T(v).$$

$b)$: Tenemos que probar una igualdad de conjuntos. Vamos a probar la doble inclusión.

Si $v \in N(f_1) \cap Nu(f_2) \cap Nu(f_3)$ entonces $v \in N(f_1)$, $v \in Nu(f_2)$ y $v \in Nu(f_3)$. Es decir $f_1(v) = f_2(v) = f_3(v) = 0$. Entonces

$$T(v) = f_1(v)w_1 + f_2(v)w_2 + f_3(v)w_3 = 0w_1 + 0w_2 + 0w_3 = 0_{\mathbb{W}} + 0_{\mathbb{W}} + 0_{\mathbb{W}} = 0_{\mathbb{W}},$$

entonces $v \in Nu(T)$ y tenemos que $N(f_1) \cap Nu(f_2) \cap Nu(f_3) \subseteq Nu(T)$.

Recíprocamente, si $v \in Nu(T)$ entonces,

$$0_{\mathbb{W}} = T(v) = f_1(v)w_1 + f_2(v)w_2 + f_3(v)w_3.$$

Observar que $f_1(v), f_2(v), f_3(v) \in \mathbb{R}$ (el cuerpo de $\mathbb{W}$), entonces la ecuación anterior es una combinación lineal de los vectores w_1, w_2, w_3 igualada al elemento neutro de $\mathbb{W}$. Como $\{w_1, w_2, w_3\}$ es una base de $\mathbb{W}$, los escalares $f_1(v), f_2(v), f_3(v)$ son todos nulos. Es decir $f_1(v) = f_2(v) = f_3(v) = 0$, entonces $v \in Nu(f_1) \cap Nu(f_2) \cap Nu(f_3)$ y tenemos la otra inclusión, $Nu(T) \subseteq Nu(f_1) \cap Nu(f_2) \cap Nu(f_3)$. Como probamos la doble inclusión, concluimos que $Nu(T) = Nu(f_1) \cap Nu(f_2) \cap Nu(f_3)$. □

Transformaciones lineales inversibles

Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Diremos que:

T es *monomorfismo* si T es inyectiva, es decir, si $T(v_1) = T(v_2)$ entonces $v_1 = v_2$.

T es *epimorfismo* si T es sobreyectiva, es decir, si $Im(T) = \mathbb{W}$.

T es *isomorfismo*, si T es biyectiva, es decir, si es monomorfismo y epimorfismo.

Por otra parte, para lo que viene a continuación, vamos a definir la composición de transformaciones lineales.

Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}$ tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ y $S \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{Z})$. La composición de S con T es la función $S \circ T : \mathbb{V} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$S \circ T(v) = S(T(v)).$$

Se puede probar (hacer como ejercicio) que

> si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ y $S \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{Z})$ entonces $S \circ T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{Z})$, es decir, la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.

Los siguientes resultados los usaremos ampliamente a lo largo de la Guía 2.

Proposición 1. *Sean* $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ *dos* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales y* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$*. Entonces:*

1. T *es monomorfismo si y sólo si* $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$.

2. *Si T es isomorfismo, entonces* $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$. *En este caso, existe T^{-1} y $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$ (es decir la inversa de una transformación lineal, también es una transformación lineal).*

Dem. 1.: Vamos a probar las dos implicaciones. En primer lugar, supongamos que T es monomorfismo y veamos que eso implica que $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$.

Si T es monomorfismo, entonces $T(v_1) = T(v_2)$ implica que $v_1 = v_2$. Supongamos que $v \in Nu(T)$, entonces $T(v) = 0_{\mathbb{W}}$, por otra parte, como T es TL, siempre vale que $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}} = T(v)$, entonces, por hipótesis, $v = 0_{\mathbb{V}}$ y $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$.

Recíprocamente, supongamos que $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ y veamos que eso implica que T es monomorfismo.

Supongamos que $T(v_1) = T(v_2)$ para ciertos $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$. Entonces, como T es TL, tenemos que $T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) = 0_{\mathbb{W}}$, entonces $v_1 - v_2 \in Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ por hipótesis. Por lo tanto $v_1 = v_2$ y T es monomorfismo.

2. Si T es isomorfismo, entonces T es monomorfismo y $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ (por el item 1.) y además T es epimorfismo, es decir $Im(T) = \mathbb{W}$. Entonces, por el teorema de la dimensión, tenemos que

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(\{0_{\mathbb{V}}\}) + \dim(\mathbb{W}) = \dim(\mathbb{W}).$$

En este caso, si T es isomorfismo entonces T es biyectiva y existe T^{-1}.

De hecho, como $Im(T) = \mathbb{W}$ y $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$, dado $w \in \mathbb{W}$ existe un único $v \in \mathbb{V}$ tal que $T(v) = w$. Vamos a definir $T^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ como

$$T^{-1}(w) := v.$$

La función T^{-1} está bien definida porque: T^{-1} está definida en todo elemento del dominio $\mathbb{W}$ (justamente porque $Im(T) = \mathbb{W}$) y además a cada elemento del dominio le corresponde sólo un elemento de $\mathbb{V}$ (justamente porque $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$). Entonces, por como definimos T^{-1}, observar que

$$T \circ T^{-1}(w) = T(T^{-1}(w)) = T(v) = w = I_{\mathbb{W}}(w),$$

como esa igualdad vale para todo $w \in \mathbb{W}$ tenemos que $T \circ T^{-1} = I_{\mathbb{W}}$. Además,

$$T^{-1} \circ T(v) = T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(w) = v = I_{\mathbb{V}}(v),$$

como esa igualdad vale para todo $v \in \mathbb{V}$ tenemos que $T^{-1} \circ T = I_{\mathbb{V}}$.

Sólo nos resta probar que T^{-1} es una TL.

Sean $w, w' \in \mathbb{W}$ entonces existen únicos $v, v' \in \mathbb{V}$ tales que $T(v) = w$ y $T(v') = w'$ y entonces $T^{-1}(w) = v$ y $T^{-1}(w') = v'$. Como T es una TL, tenemos que $T(v + v') = T(v) + T(v') = w + w'$ entonces, por definición de T^{-1}, tenemos que $T^{-1}(w + w') = v + v' = T^{-1}(w) + T^{-1}(w')$.

De manera similar, se prueba que si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $w \in \mathbb{W}$ entonces $T^{-1}(\alpha w) = \alpha T^{-1}(w)$ (hacerlo como ejercicio) y concluimos que $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$. □

El siguiente ejercicio tiene varios puntos en común con el ejercicio 2.9 (se sugiere resolver ambos). Vamos a ir probando item por item.

Ejercicio 2.10: Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y sea $\{v_1, \cdots, v_n\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$. Sea $\Lambda : \mathbb{K}^n \to \mathbb{V}$ la aplicación en $\mathbb{V}$ definida por

$$\Lambda([x_1 \ \cdots \ x_n]^T) := \sum_{j=1}^{n} x_j v_j.$$

a) Probar que $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{V})$.

Basta con probar que la aplicación Λ cumple con $i)$ y $ii)$ de la definición de TL.

Sean $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T, y = [y_1 \ \cdots \ y_n]^T \in \mathbb{K}^n$. Entonces

$\Lambda(x+y) = \Lambda([x_1 \ \cdots \ x_n]^T + [y_1 \ \cdots \ y_n]^T) = \Lambda([x_1+y_1 \ \cdots \ x_n+y_n]^T) = \sum_{j=1}^{n}(x_j+y_j)v_j = \sum_{j=1}^{n}(x_jv_j+y_jv_j) = \sum_{j=1}^{n} x_jv_j + \sum_{j=1}^{n} y_jv_j = \Lambda([x_1 \ \cdots \ x_n]^T) + \Lambda([y_1 \ \cdots \ y_n]^T) = \Lambda(x)+\Lambda(y)$.

Por otra parte, sean $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces $\Lambda(\alpha x) = \Lambda(\alpha[x_1 \ \cdots \ x_n]^T) = \Lambda([\alpha x_1 \ \cdots \ \alpha x_n]^T) = \sum_{j=1}^{n}(\alpha x_j)v_j = \alpha\sum_{j=1}^{n} x_jv_j = \alpha\Lambda([x_1 \ \cdots \ x_n]^T) = \alpha\Lambda(x)$.

b) Describir la imagen de Λ.

Recordemos (lo probamos arriba) que si tenemos un sistema de generadores (en particular una base) de $\mathbb{K}^n$ entonces la imagen de Λ está generada por los transformados de dichos generadores de $\mathbb{K}^n$.

Sean e_i los vectores de $\mathbb{K}^n$ cuyas componentes son 0 en todos lados excepto en el lugar i donde vale 1, por ejemplo, $e_1 = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$. Claramente $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$. Por lo tanto

$$Im(\Lambda) = gen\{\Lambda(e_1), \Lambda(e_2), \cdots, \Lambda(e_n)\}.$$

Observar que $\Lambda(e_i) = \sum_{j=1}^{n}(e_i)_j v_j = v_i$, (porque solo sobrevive el sumando $j = i$ que es cuando la componente de e_i es 1). Entonces

$$Im(\Lambda) = gen\{\Lambda(e_1), \Lambda(e_2), \cdots, \Lambda(e_n)\} = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}.$$

c.1) Probar que Λ es monomorfismo si, y sólo si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es LI.

Recordemos que como $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{V})$ entonces Λ es monomorfismo si y sólo si $Nu(\Lambda) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Vamos a probar la doble implicación.

Primero, supongamos que Λ es monomorfismo. Queremos probar que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es LI.

Sean $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n = 0_{\mathbb{V}}$, para probar que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es LI basta ver que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Observar que $[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n]^T \in \mathbb{K}^n$ y además

$$\Lambda([\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n]^T) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n = 0_{\mathbb{V}}.$$

Por lo tanto, $[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n]^T \in Nu(\Lambda) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ (por hipótesis). Entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, y probamos $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es LI.

Recíprocamente, supongamos que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es LI. Queremos probar que $Nu(\Lambda) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Si $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T \in Nu(\Lambda)$, entonces

$$0_{\mathbb{V}} = \Lambda(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n.$$

Tenemos una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ igualada al elemento neutro de $\mathbb{V}$. Como $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es LI (por hipótesis), entonces $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Entonces $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T = 0_{\mathbb{K}^n}$. Por lo tanto, $Nu(\Lambda) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ y Λ es monomorfismo.

c.2) Probar que Λ es epimorfimo si, y sólo si, $\mathbb{V} = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.

Recordar que Λ es epimorfismo si y sólo si, $Im(T) = \mathbb{V}$.

Usando el ítem b), tenemos que $Im(T) = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Por lo tanto, Λ es epimorfismo si, y sólo si $\mathbb{V} = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.

c.3) Probar que Λ es isomorfimo si, y sólo si, $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$.

Recordemos que Λ es isomorfismo si y sólo si $Im(T) = \mathbb{V}$ y $Nu(T) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Usando los ítems c.1 y c.2 tenemos que $Im(T) = \mathbb{V}$ y $Nu(T) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ si y sólo si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es LI (item c.1) y $\mathbb{V} = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ (ítem c.2). Pero $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es LI y $\mathbb{V} = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ si y sólo si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ (por definición). Conclusión, Λ es isomorfimo si, y sólo si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$.

d) Mostrar que si $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ entonces

$$\Lambda \circ \Phi = I_{\mathbb{V}} \text{ y } \Phi \circ \Lambda = I_{\mathbb{K}^n}.$$

Donde $\Phi : \mathbb{V} \to \mathbb{K}^n$ es la TL tal que $\Phi(v) = [v]^B$.

Ya vimos en el item c.3 que si $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ entonces Λ es un isomorfismo y por lo tanto existe $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K}^n)$, lo que nos pide el ejercicio es verificar que $\Phi = \Lambda^{-1}$.

Sea $v \in \mathbb{V}$, entonces como B es una base de $\mathbb{V}$, existen $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

Entonces $\Phi(v) = [v]^B = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T$. Por lo tanto

$$\Lambda \circ \Phi(v) = \Lambda(\Phi(v)) = \Lambda([x_1 \ \cdots \ x_n]^T) = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = x_1 v_1 + \cdots x_n v_n = v = I_{\mathbb{V}}(v).$$

Como la iguadad anterior vale para todo $v \in \mathbb{V}$, concluimos que $\Lambda \circ \Phi = I_{\mathbb{V}}$.

Por otra parte, sea $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{K}^n$. Observar que como $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$, si tomamos el vector $v := x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, entonces claramente $[v]^B = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T$. Entonces

$$\Phi \circ \Lambda(x) = \Phi \circ \Lambda([x_1 \ \cdots \ x_n]^T) = \Phi(\Lambda([x_1 \ \cdots \ x_n]^T)) =$$

$$= \Phi(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = [x_1v_1 + \cdots + x_nv_n]^B = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T = I_{\mathbb{K}^n}(x).$$

Como la igualdad anterior vale para todo $x \in \mathbb{K}^n$, concluimos que $\Phi \circ \Lambda = I_{\mathbb{K}^n}$.

La siguiente propiedad vale cuando los espacios de salida y de llegada de una transformación lineal tienen la misma dimensión:

Proposición 2. *Sean* $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ *dos* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales tales que* $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$ *y sea* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. *Entonces son equivalentes:*

i) T *es isomorfismo,*

ii) T *es monomorfismo,*

iii) T *es epimorfismo.*

Dem. $i) \Rightarrow ii)$: Si T es isomorfismo entonces (por definición) T es monomorfismo y entonces vale $ii)$.

$ii) \Rightarrow iii)$: Si T es monomorfismo, entonces $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$. Por hipótesis $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$ entonces, por el Teorema de la dimensión, tenemos que

$$\dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(Nu(T)) = \dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W}).$$

Como $Im(T) \subseteq \mathbb{W}$ y en este caso $\dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{W})$, concluimos que $Im(T) = \mathbb{W}$, entonces T es epimorfismo y vale $iii)$.

$iii) \Rightarrow i)$: Si T es epimorfismo, entonces $Im(T) = \mathbb{W}$. Por hipótesis $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$ entonces, por el Teorema de la dimensión, tenemos que

$$\dim(Nu(T)) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(\mathbb{W}) = 0,$$

entonces $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ y T también es monomorfismo. Por lo tanto T es isomorfismo y vale $i)$. $\square$

Como probamos las implicaciones $i) \Rightarrow ii)$, $ii) \Rightarrow iii)$ y $iii) \Rightarrow i)$, concluimos que, cuando $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$, los 3 items son equivalentes. Es decir, T es isomorfismo si y sólo si T es monomorfismo, si y sólo si T es epimorfismo.

El siguiente ejemplo muestra que si $\dim(\mathbb{V}) \neq \dim(\mathbb{W})$, el resultado anterior es falso.

Ejemplo : Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Observar que

$$Im(T) = gen\{T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}), T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}), T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})\} = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\} = \mathbb{R}^2.$$

Entonces T es epimorfismo.

Pero, por el Teorema de la dimensión, $\dim(Nu(T)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(Im(T)) = 3 - 2 = 1$. Más aún,

$$Nu(T) = gen\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}.$$

Entonces T NO es monomorfismo y T NO es isomorfismo.